Clasificador híbrido de patrones basado en la *Lernmatrix* de Steinbuch y el *Linear Associator* de Anderson-Kohonen

R. Santiago-Montero, J. L. Díaz-de-León-S. & C. Yáñez-Márquez
Centro de Investigación en Computación
del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo se presenta un nuevo clasificador basado en los principios de álgebra de matrices que utiliza el *Linear Associator* y el criterio de clasificación de la *Lernmatrix* de Steinbuch, creándose así un método híbrido que tiene la ventaja de que puede trabajar patrones de entrada con valores reales, y además no requiere de la restricción de ortonormalidad, impuesta por el *Linear Associator*.

1. Introducción.

Las memorias asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas.

Uno de los pioneros en esta área de investigación fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961). La *Lernmatrix* constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y es reconocido como uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990).

Once años después de que Steinbuch dio a conocer *Lernmatrix*, dos investigadores concluyeron y presentaron ante al comunidad científica internacional sus trabajos de investigación. Apoyado por la *UCLA*, a principios de 1972 James A. Anderson desarrolló y presentó su *Interactive Memory* (Anderson, 1972), y meses más tarde, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, dio a conocer ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972).

Los trabajos de Anderson y Kohonen dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*.

Es pertinente mencionar un hecho curioso, que se ha presentado en personajes dedicados a otras ramas de la ciencia: James A. Anderson y Teuvo Kohonen obtuvieron resultados *asombrosamente similares* a pesar de que trabajaron independientemente, alejados, y sin tener noticia uno del otro, hasta tiempo después de que aparecieron los artículos; además, estos autores tienen formaciones profesionales totalmente diferentes: Anderson es neurofisiólogo (estadunidense) y Kohonen es físico e ingeniero eléctrico (finlandés) (Anderson & Rosenfeld, 1990; Kohonen, 1989).

Cada uno de los modelos mencionados tiene ventajas y desventajas. En este artículo se presenta un modelo híbrido de memoria asociativa que trabaja eficientemente como un clasificador de patrones racionales, y en cuyo diseño se han tomado las ventajas de ambos modelos evitando, al mismo tiempo, las desventajas. Los resultados de este trabajo ilustran la importancia potencial de las memorias asociativas en el área de reconocimiento de patrones.

Una memoria asociativa tiene como propósito fundamental: recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado.

El problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)

2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

En ambas fases, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por $\mathbf{x}$ y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por $\mathbf{y}$. Cada uno los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ del esquema forman la asociación $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Dado un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa M se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$$

Definición 1.1 *A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama patrones fundamentales.*

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas (Kohonen,1972).

Definición 1.2 *Si se cumple que* $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \ \forall \mu \in \{1,2,...,p\}$, *se dice que la memoria es autoasociativa; de otro modo, la memoria es heteroasociativa. Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente:* $\exists \mu \in \{1,2,...,p\}$ *para el que se cumple que* $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Definición 1.3 *Si al presentarle a la memoria* M *un patrón alterado* $\widetilde{\mathbf{x}}^\omega$ *como entrada* ($\omega \in \{1,2,...,p\}$), M *responde con el correspondiente patrón fundamental de salida* $\mathbf{y}^\omega$, *se dice que la recuperación es perfecta.*

Definición 1.4 *Una memoria perfecta es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.*

A y B son dos conjuntos que cumplen con lo siguiente: las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, son elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz M son elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \ \forall \mu \in \{1,2,...,p\}$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1,2,...,n\}$ o $j \in \{1,2,...,m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna $\mathbf{x}^\mu$ se representa por

$$x_j^\mu$$

Los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida son, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \qquad \mathbf{y}^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

2. El trabajo de Steinbuch.

La *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $\mathbf{x}^\mu \in A^n$, $A = \{0,1\}$ y produce como salida la clase $\mathbf{y}^\mu \in A^m$ que le corresponde (de entre m clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1,2,...,m\}$, se asignan a las componentes del vector de salida $\mathbf{y}^\mu$ los siguientes valores: $y_k^\mu = 1$, y $y_j^\mu = 0$ para $j = 1,2...,k-1,k+1,...m$

En la tabla se esquematiza la fase de aprendizaje para la *Lernmatrix* de Steinbuch, con la pareja de patrones fundamentales $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \in A^n \times A^m$.

	x_1^μ	x_2^μ	$\cdots$	x_j^μ	$\cdots$	x_n^μ
y_1^μ	m_{11}	m_{12}	$\cdots$	m_{1j}	$\cdots$	m_{1n}
y_2^μ	m_{21}	m_{22}	$\cdots$	m_{2j}	$\cdots$	m_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_i^μ	m_{i1}	m_{i2}	$\cdots$	m_{ij}	$\cdots$	m_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_m^μ	m_{m1}	m_{m2}	$\cdots$	m_{mj}	$\cdots$	m_{mn}

(1)

Cada uno de los componentes m_{ij} de M, la *Lernmatrix* de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 1 \text{ y } x_j^\mu = 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $\mathbf{x}^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ que le corresponde al patrón $\mathbf{x}^\omega$; en virtud del método de construcción de los vectores $\mathbf{y}^\mu$ la clase debería obtenerse sin ambigüedad.

La i-ésima coordenada y_i^ω del vector de clase $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador *máximo*:

$$y_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^n m_{ij}.x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^m \left[\sum_{j=1}^n m_{hj}.x_j^\omega\right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

Ejemplo 2.1 *3 patrones de dimensión 5, donde cada uno se asigna a una clase diferente:*

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La fase de aprendizaje se inicia asignando el valor cero a todos los elementos m_{ij} y a continuación se realizan las operaciones de la crossbar 1 y la expresión 2 con las tres asociaciones, para obtener la *Lernmatrix*:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \tag{4}$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la matriz $\mathbf{M}$ uno de los patrones de entrada y realizar las operaciones indicadas en la expresión 3; a la salida se espera obtener la clase a la que pertenece el vector de entrada.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = 3\varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^1 = \varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^1 = \varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^1 \right]$ y de acuerdo con la expresión 3, se tiene que $y_1^1 = 1$ y $y_2^1 = 0 = y_3^1$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es $\mathbf{y}^1$.

De igual manera se recuperan las clases a la que pertenecen los patrones de entrada $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^3$$

Ejemplo 2.2 *Agreguemos las siguientes dos asociaciones:*

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La nueva *Lernmatrix* es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intentar recuperar la clase para cada uno de los cinco patrones de entrada, se observa cómo la *Lernmatrix* llega a la **saturación**:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ clase } \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

3. El trabajo de Anderson y Kohonen.

Para presentar el *Linear Associator*, consideremos el conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

Etapa 1.- Para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $m \times n$

$$\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu) = \begin{pmatrix} y_1^\mu x_1^\mu & y_1^\mu x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu x_n^\mu \\ y_2^\mu x_1^\mu & y_2^\mu x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu x_1^\mu & y_i^\mu x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu x_1^\mu & y_m^\mu x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu x_n^\mu \end{pmatrix} \tag{5}$$

Etapa 2.- Se suman la p matrices para obtener la memoria

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{p} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = [m_{ij}]_{m \times n} \tag{6}$$

de manera que la ij-ésima componente de la memoria $\mathbf{M}$ se expresa así:

$$m_{ij} = \sum_{\mu=1}^{p} y_i^\mu x_j^\mu \tag{7}$$

La *fase de recuperación* consiste en presentarle a la memoria un patrón de entrada $\mathbf{x}^\omega$, donde $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$ y realizar la operación

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega = \left[\sum_{\mu=1}^{p} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega \tag{8}$$

Al desarrollar la sumatoria de la expresión 8, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega &= \left[\mathbf{y}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t + \mathbf{y}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t + \cdots + \mathbf{y}^\omega \cdot (\mathbf{x}^\omega)^t + \cdots + \mathbf{y}^p \cdot (\mathbf{x}^p)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega \\
\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega &= \left[\mathbf{y}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega + \left[\mathbf{y}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega + \cdots + \left[\mathbf{y}^\omega \cdot (\mathbf{x}^\omega)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega + \cdots + \left[\mathbf{y}^p \cdot (\mathbf{x}^p)^t \right] \\
\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega &= \mathbf{y}^1 \cdot \left[(\mathbf{x}^1)^t \cdot \mathbf{x}^\omega \right] + \mathbf{y}^2 \cdot \left[(\mathbf{x}^2)^t \cdot \mathbf{x}^\omega \right] + \cdots + \mathbf{y}^\omega \cdot \left[(\mathbf{x}^\omega)^t \cdot \mathbf{x}^\omega \right] + \cdots + \mathbf{y}^p \cdot \left[(\mathbf{x}^p)^t \right.
\end{aligned}$$

Y esto último se puede escribir de la siguiente manera, usando de nuevo la notación sumatoria:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega}=\mathbf{y}^{\omega}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]+\sum_{\mu\neq\omega}\mathbf{y}^{\mu}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right] \tag{9}$$

La forma de la expresión 9 nos permite investigar las condiciones que se deben cumplir para que el método de recuperación propuesto dé como resultado salidas perfectas. Para que la expresión anterior arroje como resultado al patrón $\mathbf{y}^{\omega}$, es preciso que se cumplan dos igualdades:

a) $\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]=1$

b) $\left[(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]=0$ siempre que $\mu\neq\omega$

Dado que ω se escogió arbitrariamente, las dos igualdades se deben cumplir $\forall\omega\in\{1,2,...,p\}$, lo cual indica que los vectores de entrada $\mathbf{x}^{\mu}$ deben ser ortonormales. Esta condición de ortonormalidad se puede resumir en la siguiente expresión:

$$(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}=\begin{cases}1 \text{ si } \mu=\omega\\ \\ 0 \text{ si } \mu\neq\omega\end{cases} \tag{10}$$

Si se cumple la condición que se manifiesta en la expresión 10, entonces la recuperación es perfecta; es decir, la expresión 9 toma la forma $\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega}=\mathbf{y}^{\omega}$.

Sin embargo, si los vectores de entrada no son ortonormales, suceden dos cosas:

· el factor $\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]$ no es 1

· el término $\sum_{\mu\neq\omega}\mathbf{y}^{\mu}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]$ no es 0

Este último término, llamado *cross-talk*, representa el ruido producido por la interacción entre los patrones de entrada, y tiene como consecuencia inmediata que la recuperación no es perfecta, excepto si el número de patrones almacenados es pequeño comparado con la dimensión n de los vectores de entrada. Algunos investigadores afirman que ese número pequeño de patrones debe estar entre 0,1n y 0,2n (Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1995; Ritter, Sussner & Díaz-de-León, 1998).

Ejemplo 3.1 *Cuatro parejas de patrones ($p=4$), con $n=3$ y $m=5$.*

$$\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{y}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix};\quad \mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{y}^2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \mathbf{y}^3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix};\quad \mathbf{x}^4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \mathbf{y}^4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Calculemos los términos $\mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t$ usando la expresión 5:

$$\mathbf{y}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3 \cdot (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}^4 \cdot (\mathbf{x}^4)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la memoria $\mathbf{M}$ a partir de las expresiones 6 y 7:

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Se usa la expresión 8 y la memoria 11 para recuperación:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \left[\sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t\right] \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^1$$

Análogamente con los otros tres patrones:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2; \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^3 \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^4$$

4. El clasificador híbrido de patrones

Los ejemplos 2.1 y 3.1 ilustran el funcionamiento y las desventajas de los dos modelos de memorias asociativas, la *Lernmatrix* y el *Linear Associator*.

Por un lado, la *Lernmatrix* puede aceptar sólo patrones binarios como entradas, y el ejemplo 2.1 muestra cómo se llega rápidamente a la saturación, fenómeno que impide la clasificación correcta. Por otro lado, no obstante que el *Linear Associator* elimina la restricción de patrones binarios a la entrada, puesto que puede aceptar patrones con valores reales en sus componentes, surge una restricción bastante fuerte: la ortonormalidad de los patrones de entrada.

En el ejemplo 3.1 sólo se recuperó un patrón de salida de manera perfecta, debido a los devastadores efectos que tiene, en la fase de recuperación, el término de *cross-talk* diferente de cero, en virtud de que los patrones de entrada no son ortonormales, como lo exige la expresión 10.

El clasificador híbrido que se propone en este trabajo elimina las desventajas de ambos modelos, pero incluye algunos principios de diseño y operación de éstos. El algoritmo del nuevo clasificador es como sigue:

1. Sea un conjunto fundamental de patrones de entrada de dimensión n con valores reales en sus componentes (a la manera del *Linear Associator*), que se aglutinan en m clases diferentes.

2. A cada uno de los patrones de entrada que pertenece a la clase k se le asigna el vector formado por ceros, excepto en la coordenada k-ésima, donde el valor es uno (a la manera de la *Lernmatrix*).

3. La *fase de aprendizaje* es similar a la del *Linear Associator*, de acuerdo con las expresiones 5, 6 y 7.

4. La fase de recuperación es similar a la que usa la *Lernmatrix*, de acuerdo con la expresión 3

Este algoritmo simple nos permite diseñar un poderoso clasificador de patrones, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1 *Cinco patrones de dimensión 2 con valores reales, aglutinados en dos clases diferentes:*

A la primera clase pertenecen dos patrones:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -4{,}1 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -4{,}8 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$$

Tres patrones pertenecen a la segunda clase:

$$\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -6{,}3 \\ -3{,}8 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -6{,}2 \\ -3{,}1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} -7{,}0 \\ -3{,}0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^3 = \mathbf{y}^4 = \mathbf{y}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos $\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ usando la expresión 5, y el clasificador $\mathbf{C}$ se obtiene a partir de las expresiones 6 y 7:

$$C = \sum_{\mu=1}^{5} \mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^{t} = \begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \tag{12}$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva acabo de de acuerdo con la expresión 3.

$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4{,}1 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66{,}89 \\ 42{,}33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$
$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4{,}8 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76{,}32 \\ 52{,}02 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$
$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6{,}3 \\ -3{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25{,}67 \\ 160{,}47 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$
$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6{,}2 \\ -3{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}38 \\ 151{,}59 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$
$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7{,}0 \\ -3{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38{,}3 \\ 166{,}2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Ejemplo 4.2 *Ahora probemos el clasificador con dos patrones que no pertencen al conjunto fundamental:*

$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4{,}0 \\ 6{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83{,}6 \\ 18{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$
$$\begin{pmatrix} -8{,}9 & 8{,}0 \\ -19{,}5 & -9{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6{,}0 \\ -4{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}2 \\ 117{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Nota 1 *Resulta evidente que este problema de clasificación no puede ser resuelto por la Lernmatrix de Steinbuch, ya que los patrones de entrada no son binarios, como lo requiere ese modelo. Por otro lado, tampoco es posible resolverlo por el Linear Associator, debido a que los patrones de entrada no son ortonormales, como lo exige la expresión 10.*

5. Conclusiones y trabajo futuro.

En este trabajo se ha presentado un nuevo clasificador el cual utiliza como base dos modelos conocidos de memorias asociativas: la *Lernmatrix* de Steinbuch y el *Linear Associator.*

El algoritmo del nuevo clasificador recoge lo mejor de ambos modelos y elimina sus desventajas, y con ello se ha logrado crear un método híbrido que tiene la ventaja de que puede trabajar patrones de entrada con valores reales, y además no requiere de la restricción de ortonormalidad, impuesta por el *Linear Associator.*

El trabajo futuro inmediato es encontrar la base teórica que sustenta el buen funcionamiento del algoritmo propuesto.

6. Agradecimientos.

Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

Referencias

[1] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics, 26*, 175-185.

[2] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Fundations of Research*, Cambridge: MIT Press.

[3] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.

[4] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks (11), 5*, 869-876.

[5] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA'99, México, D.F.*, 23-38.

[6] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

[7] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers, C-21, 4*, 353-359.

[8] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[9] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.

[10] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik, 1, 1*, 36-45.

[11] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik, 1, 3*, 117-124.

[12] Yáñez-Márquez , C. (2002). *Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios.* Tesis doctoral, CIC-IPN, México.

[13] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Lernmatrix de Steinbuch*, IT-48, Serie Verde, ISBN 970-18-6688-6, CIC-IPN, México.